

Title	非同次型線状移動可能函数方程式ニ就テ（V）
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 120 p.35-p.40
Issue Date	1937-02-05
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74466
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

541. 非同次型線状移動可能 函数方程式 = 就テ (V)

北 川 敏 男 (阪大)

5. 同題 (IV)⁽¹⁾ = 於テ函数方程式 (1) ヲ $-\infty < x < \infty$ ヲ解
カウトシタガ、ソノアトヲ続ケマウトスルトキ幾多ノ困難ニ
出遭フ。ソレデ、ソレハ一應撤回シテ、コレカテ、 $0 < x < \infty$
デ解リコトヲ考ヘル。

又 (4) = 於テ、コトデハ

$$(4') \quad g_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{iu(x-\xi)} g_A(u) du \right\} d\xi$$

ヲトル。コレノ *existence* ハ假定 (2) ヲ用キレバ容易ニ
ワカル。尚、 $g_A(u)$ ハ (IV) ト同様ニエラブノデアルガ、
(7) ノ代リニ

$$(7') \quad 0 < A < A + \delta \leq \eta < 1$$

(1) 本誌, 第115号, 522番。本文ヲ述べタ如ク、(V) デハ (IV) ト違ッ
タ $g_1(x)$, $g_2(x)$ ヲトル。尚 (IV) = 於ケル $g_1(x)$, $g_2(x)$ ハ i デ
與ツタモノヲ採用スルコトヲ要スル。又 (IV) (4) = 於イテ $\xi - x$
ハ $x - \xi$ トシナケレバナラナイ。

ナル様ニ、 A ト δ トヲエラシメテオクコトニスル。ソコニ與ヘテレタ函数方程式

$$(1) \quad \Gamma_x f(t) = g(x) \quad (x > 0)$$

ヲ解ク問題ヲ

$$(15) \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

トワケテ

$$(12) \quad \Gamma_x f(t) = g_1(x) \quad (x > 0)$$

$$(13) \quad \Gamma_x f(t) = g_2(x) \quad (x > 0)$$

ナルニツノ函数方程式ヲ解ク問題ニホス。前者ノ解ヲ $f_1(x)$, 後者ノ解ヲ $f_2(x)$ トスルトキ, $f_1(x) + f_2(x)$ ヲ以テ求メル解タラシメヤウトイフノガ吾々ノ目標デアル。

茲デ $g_1(x)$ 及ビ $g_2(x)$ ハ夫々 $g(x)$ ノ *low* 及ビ *high frequency component* ヲ (一ツノ特徴ナ $\mathcal{G}_A(u) = \Xi$ ヲテ) 表シテキル。

(12) = 關シテハ (IV) § ノ議論ヲ復活サセレバヨイ。但シ, (10) ハ次ノ如ク、改メテ見直サナケレバナラナイ。

$$\begin{aligned} (10') \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^k g_1^{(\nu)}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^{\nu} e^{iu(x-\xi)} \mathcal{G}_A(u) du \right\} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^k (iu)^{\nu} e^{iu(x-\xi)} \mathcal{G}_A(u) du \right\} d\xi \end{aligned}$$

茲デ u = 關スル積分ハ實ハ $(-(A+\delta), A+\delta)$ ノ範圍ニ限ラレタコトデアリ、又 (6) 及ビ (7') ノ成立ヲ想起スレバ, *summation* ト積分トノ交換可能ハ容易ニワカル。

更ニ (10') ノ両辺ニ Γ ヲ施セバ, 同様ノ根據カラ § 3 ノ

結果ヲ得ル。

依ツテ以下(13)ノ解ヲ考ヘル。

6. 補助定理 I.

$$(16) \quad g_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g^{(m)}(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)}}{(iu)^m} (1 - \mathcal{P}_A(u)) du \right\} d\xi$$

証明. 今 $x \in C$ トテ任意ノ実數トスル. § 2 (5) = 依

ツテ

$$\begin{aligned} (17) \quad & \int_c^x \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{iu(t-\xi)} \mathcal{P}_A(u) du \right\} d\xi \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)} - e^{iu(c-\xi)}}{iu} \mathcal{P}_A(u) du \right\} d\xi \end{aligned}$$

次ニ,

$$\begin{aligned} (18) \quad & \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)} - e^{iu(c-\xi)}}{iu} \mathcal{P}_A(u) du \\ &= - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)} - e^{iu(c-\xi)}}{iu} (1 - \mathcal{P}_A(u)) du \\ &\quad + \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)} - e^{iu(c-\xi)}}{iu} du \end{aligned}$$

ナル余解ヲ施シ, 更ニ

$$\begin{aligned} (19) \quad & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)} - e^{iu(c-\xi)}}{iu} du \right\} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^c + \int_c^x + \int_x^\infty \right\} g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(x-\xi)} - e^{iu(c-\xi)}}{iu} du \right\} d\xi \\ &= \int_0^x g(\xi) d\xi \end{aligned}$$

ヲ得ル。從ツテ吾人ノ得ルトコロハ

II. 今 $R(\lambda) > 0$ = 對シテハ, $(\alpha_n \rightarrow \infty)$

$$(20) \quad \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\lambda(x-\alpha_n)}$$

ナル展開が成立シタトスル。然ルトキ, Bochner = ヨリ形式的 = ック ッタ

$$(21) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n g_2(x-\alpha_n)$$

ハ (2) ノ形式解ヲ與ヘル。サテ (21) ハ

$$(22) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi} \int_0^{\infty} g^{(m)}(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-g_A(u)}{(iu)^m} e^{iu(x-\alpha_n-t)} du \right] dt$$

= 外ナラナイ。(22) ノ existence が示サレナケレバナラナイ。

ソノタメニ, 先ツ

$$(23) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-g_A(u)}{(iu)^m} e^{iu(\tau-\alpha_n)} du = K(\tau)$$

トオク。コゝ = summation が、 τ ノ任意ノ有限區間で一様收斂ナルコトハ

$$(24) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-g_A(u)}{(iu)^m} e^{iu(\tau-\alpha_n)} du = o((\tau-\alpha_n)^{-k})$$

トナルコトが、任意ノ positive number k = 對シテ云ヘルノデアレカテ、 $k = k(\alpha_n)$ トシテ

$$(25) \quad \alpha_n^{k(\alpha_n)} \geq n^2 A_n$$

ナル様ニ、 $k(\alpha_n)$ ヲトツテ考ヘルト明カデアイル。

従ッテ問題ハ

$$(26) \int_0^{\infty} g^{(m)}(t) K(x-t) dt$$

ノ existence = 存ス。

8. 今話ノ便宜上

$$(27) \Gamma f(x) = \int_0^1 f(x+t) dp(t)$$

従ッテ

$$(28) G(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda t} dp(t)$$

ナル特別ナル形デアタヘラレタ場合ヲ考ヘル。(27)ハ

$f(x+t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ノ一様ノ linear aggregate デアル。

(以下ノ議論ハ (27) ナル形ニ限ラズ、モット一般ノ linear aggregate デモ成立スルコトハ、ソノ経過ヲ有レバ明カデアイル。)

サテ (26) ノ existence ヲ示スノハ、有限區間ハ問題ニナラナイ。(26) ノ existence ヲミルニハ、

$$\int_{x+1}^{\infty} g^{(m)}(t) K(x-t) dt$$

ガケテ問題トスレバ足リル。ソノタメニ、 $K(t)$ ($t < -1$) ノ behaviour ヲ調べルコトニスル。

9. 其ノタメニ $K(t)$ ノ点 x_0 (< -1) = 於ケル Cauchy 展開ノ section (contour \mathbb{C} = 閉スル) ヲ考ヘルニ

$$(29) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda) e^{\lambda x_0}} \Gamma_{\tau} \left[e^{\lambda \tau} \int_0^{\tau} K(x_0 + \xi) e^{-\lambda \xi} d\xi \right] d\lambda (= I_c) \quad \text{say}$$

トシテコレハ表ハサレル。 (23) が てノ任意ノ有限區間デ一様収斂ナルが故ニ、

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\tau} \left[e^{\lambda \tau} \int_0^{\tau} K(x_0 + \xi) e^{-\lambda \xi} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(x_0 - t - \alpha_n)} [G(i\mu) - G(\lambda)]}{(i\mu - \lambda)(i\mu)^m} (1 - \mathcal{P}_A(\mu)) d\mu \end{aligned}$$

依ツテ

$$(30) \quad I_c = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda) e^{\lambda x_0}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(x_0 - t - \alpha_n)} G(i\mu)}{(i\mu - \lambda)(i\mu)^m} (1 - \mathcal{P}_A(\mu)) d\mu \right\} d\lambda$$

ニ等シイ。

$$\begin{aligned} (31) \quad I_c &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda) e^{\lambda x_0}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi} \int_0^{\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(x_0 - t - \alpha_n + \xi)} }{(i\mu - \lambda)(i\mu)^m} d\mu \right] d\rho(\xi) \right\} d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda) e^{\lambda x_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi} \int_0^{\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(x_0 - t - \alpha_n + \xi)} \mathcal{P}_A(\mu)}{(i\mu - \lambda)(i\mu)^m} d\mu \right] d\rho(\xi) d\lambda \\ &= I_c^{(1)} + I_c^{(2)} \quad (\text{say}) \end{aligned}$$

トナル。コレラハ余外簡單ナモノナル。